

تابع الفصل السابع / المصفوفات.

ثالثاً :- ضرب المصفوفتين.

إذا كانت المصفوفة A من الرتبة $m \times p$ و كانت المصفوفة B من الرتبة $p \times n$ فإن حاصل ضرب المصفوفتين AB ، وليكن C هو مصفوفة من الدرجة $m \times n$ حيث تحدد عناصرها بأن يكون العنصر في الصف i و العمود j في C ناتج من عملية ضرب الصف i من A مع العمود j من B

$$A_{m \times p} \times B_{p \times n} = C_{m \times n}$$

حتى تكون عملية الضرب على المصفوفات مُعرّفة ، يجب أن يكون عدد اعمدة المصفوفة الأولى مساوياً لعدد صفوف المصفوفة الثانية ، ورتبة المصفوفة الناتجة من حاصل ضرب

هي عبارة عن عدد الصفوف الأولى مضروباً في عدد أعمدة الثانية

بشكل عام ، عند ضرب مصفوفة في أخرى فإننا نقوم بضرب جميع صفوف المصفوفة الأولى

في أعمدة المصفوفة الثانية و المثال التالي يوضح ذلك :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

1) AB

2) BA

الحل :-

$$1) AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \times 0 + 3 \times 4 & 2 \times 2 + 3 \times 5 \\ -1 \times 0 + -1 \times 4 & -1 \times 2 + -1 \times 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 12 & 19 \\ -4 & -7 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

$$2) BA = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \times 2 + 2 \times -1 & 0 \times 3 + 2 \times -1 \\ 4 \times 2 + 5 \times -1 & 4 \times 3 + 5 \times -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

نستنتج أن عملية ضرب المصفوفات عملية غير إبدالية ، بمعنى :
AB ≠ BA

مثال :- إذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -1 & 7 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

أوجد : 1) AB 2) BA

نلاحظ أن عدد أعمدة المصفوفة A = عدد صفوف المصفوفة B وبالتالي يمكن إيجاد حاصل الضرب في هذه الحالة.

$$BA = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \times 0 + 2 \times -1 + -4 \times -2 & 2 \times 2 + 2 \times 3 + -4 \times 4 \\ 0 \times 0 + -1 \times -1 + 7 \times -2 & 0 \times 2 + -1 \times 3 + 7 \times 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & -6 \\ -13 & 25 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}_{3 \times 2} \begin{bmatrix} 2 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 7 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

$$= \begin{bmatrix} 0+0 & 0+(-2) & 0+14 \\ -2+0 & -2+(-3) & 4+21 \\ -4+0 & -4+(-4) & 8+28 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -2 & 14 \\ -2 & -5 & 25 \\ -4 & -8 & 36 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

تعريف :- مبدل المصفوفة (Tronspose)

إذا كانت المصفوفة A هي من الرتبة $m \times n$ فإن مبدل المصفوفة هي عبارة عن عملية تبديل الصفوف مع الأعمدة

وسنرمز لها بالرمز A^T

بصورة رمزية ، إذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{فإن}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \\ -5 & -1 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

مثال :- إذا كانت

$${}_{2 \times 3} \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 4 & 1 & -1 \end{bmatrix} = A^T \quad \text{فإن}$$

تعريف المصفوفة المتماثلة :-

إذا كانت A مصفوفة مربعة من الرتبة $m \times n$ فنقول بأن A مصفوفة متماثلة إذا كان :

$$A = A^T$$

مثال :- إذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

$$\text{فإن } A^T = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

حيث نلاحظ أن $A \neq A^T$ وبالتالي المصفوفة A غير متماثلة.

بينما إذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

فإن

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

فنلاحظ بأن $A \neq A^T$ فقول بأن المصفوفة A مصفوفة متماثلة.

• بعض الملاحظات على المصفوفات الرابعة :-

إذا كانت A مصفوفة مربعة فإن :

$$A^2 = A \times A \quad (1)$$

$$A^3 = A \times A \times A \quad (2)$$

ونستطيع الاستمرار على هذا الشكل إلى أي عدد من المرات.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{مثال :- إذا كانت}$$

أوجد A^2 ؟

$$\text{الحل :- } A \times A \times A = A^3$$

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 + -3 & 6 + 0 \\ -2 + 0 & -3 + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}_{2 \times 2} = A^2$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 + -6 & 9 + 0 \\ -4 + 3 & -6 + 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 9 \\ -1 & -6 \end{bmatrix}$$

نهاية الفصل السابع

من المصفوفات

علمتني الرياضيات : أن لكل متغير قيمة تؤدي الى نتيجة فاحتر متغيرائك جيدا لتصل الى مايرضى الله

E7sas

حقوق نسخ وطباعة هذا الملف محفوظة .

لا يجوز للمكتبات أو مراكز النسخ الطباعة دون الحصول على إذن من الناشر

لطلب الحصول عن هذا الاذن يرجى الاستفسار من الحساب الخاص بتويتر @e7sas_ud أو من صاحب موقع منتديات كوفي كوب