

تابع الفصل السابع ..

المصفوفات ..

العمليات الجبرية على المصفوفات:

- الجمع والطرح للمصفوفات.
- ضرب المصفوفات:

* ضرب مصفوفة بعدد ثابت.

* ضرب مصفوفة صفية في مصفوفة عمودية.

* ضرب مصفوفتين.

اولا: عملية جمع وطرح المصفوفات:

يمكن اجراء عملية جمع عدة مصفوفات او عملية طرح لمصفوفتين اذا كان لهم الرتبة نفسها (الدرجة) حيث نقوم بجمع او طرح العناصر المتناظرة في كل مصفوفة حيث سنحصل في النهاية على مصفوفة جديدة بنفس الرتبة.

مثال: اذا كان :

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & -5 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 10 & 7 & 6 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

فبالإمكان جمع المصفوفة A مع B او طرحها مع بعض. اما جمع A و B مع المصفوفة C او طرحهم فهي عملية غير جائزة لأختلاف الرتب وسنحصل على:

$$A + B = \begin{bmatrix} 4+3 & 3+2 & 5+4 \\ 10+(-1) & 7+(-5) & 6+(-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 9 \\ 9 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B + A = \begin{bmatrix} 3+4 & 2+3 & 4+5 \\ -1+10 & -5+7 & -3+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 9 \\ 9 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

نلاحظ ان: $A+B = B+A$ (عملية الجمع على المصفوفات عمالية ابدالية)

وبتطبيق عملية طرح المجموعات :

$$A - B = \begin{bmatrix} 4-3 & 3-2 & 5-4 \\ 10+1 & 7+5 & 6+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 11 & 12 & 9 \end{bmatrix}$$

$$B - A = \begin{bmatrix} 3-4 & 3-2 & 4-5 \\ -1-10 & -5-7 & -3-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -11 & -12 & -9 \end{bmatrix}$$

وبالتالي $A - B \neq B - A$ (عملية الطرح على المصفوفات عملية غير ابدالية)

ولكن نلاحظ ان : $A - B = (B - A)$

بعض الملاحظات : $A + A + A = 3A$

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 10 & 7 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 10 & 7 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 10 & 7 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 9 & 15 \\ 30 & 21 & 18 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 10 & 7 & 6 \end{bmatrix}$$

ثانياً: ضرب مصفوفة بعدد ثابت:

حيث نقوم بضرب جميع عناصر تلك المصفوفة بهذا العدد. بمعنى: اذا كان العدد هو C سنقوم بضرب C بالمصفوفة A وسنحصل على:

$$CA = \begin{bmatrix} ca_{11} & \dots & ca_{12} & \dots & ca_{1N} \\ ca_{21} & & ca_{22} & & ca_{20} \end{bmatrix}$$

مثال: اذا كان :

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \\ -1 & -10 \end{bmatrix} \text{ وكان } D = -1 \text{ و } C = 5 \text{ اوجد:}$$

• CB ؟

$$CB = \begin{bmatrix} 4 \times 5 & 3 \times 5 \\ 2 \times 5 & 5 \times 5 \\ -1 \times 5 & -10 \times 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 15 \\ 10 & 25 \\ -5 & -50 \end{bmatrix} = Bc$$

• DB ؟

$$DB = \begin{bmatrix} -1 \times 4 & -1 \times 3 \\ -1 \times 2 & -1 \times 5 \\ -1 \times -1 & -1 \times 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -2 & -5 \\ 1 & 10 \end{bmatrix}$$

نلاحظ ان عملية ضرب عدد ثابت بمصفوفة عملية ابدالية : $CA = AC$ حيث c عدد ثابت .

بعض الملاحظات على ضرب المصفوفات بأعداد ثابتة وجمعها:

١. اذا كان A, B مصفوفتين من الرتبة $M \times N$ وكانت $C, d \in R$ فإن :

$$C(A+B) = CA + CB \quad \bullet$$

$$C(dA) = (cd)A = (dc)A = d(CA) \quad \bullet$$

$$cA = 0 \rightarrow c = 0 \text{ or } A = 0 \quad \bullet$$

$$cA = cB \text{ فإن } A = B \text{ وكانت } C \neq 0 \quad \bullet$$

ثالثاً : ضرب مصفوفة صفية في مصفوفة عمودية: اذا كان لدينا المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & & & \end{bmatrix} \text{ ولدينا المصفوفة } B = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{M1} \end{bmatrix}$$

فإن حاصل ضرب $A \times B$ هو قيمة واحدة فقط نحصل عليها كالآتي:

$$n = M \text{ بشرط: } \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{21} \\ b_{M1} \end{bmatrix} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} + \dots + a_{1n}b_{m1}$$

مثال : اذا كانت لدينا المصفوفات التالية:

$$C = \begin{bmatrix} 10 & 7 & 8 & 4 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} A & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}$$

الحل:

$$A \times B = [3 \times 2 + 0 \times 6 + 4 \times 5] = [6 + 0 + 20] = [26].$$

$$C \times D = [10 \times 2 + 7 \times -1 + 8 \times -3 + 4 \times 0] = [20 - 7 - 24 + 0] = [-11]$$

النتيجة : $A \times B = D$

تمرين ١ : اذا كان :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 5 & -1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1/2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

اوجد :

$$A - B \quad \bullet$$

$$B + A \quad \bullet$$

$$-2A \quad \bullet$$

$$B - B \quad \bullet$$

تمرين ٢ : اذا كان :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

اوجد :

$$AB \quad \bullet$$

$$3AB = 3(AB) \quad \bullet$$