

تابع المصفوفات و المحددات

الاهداف الرئيسية :

- ايجاد محدد المصفوفة من الدرجة الثانية و الثالثة .

المحددات: محدد المصفوفة:

لكل مصفوفة مربعة A و التي عدد عناصرها اعداد حقيقية ما يسمى بمحددة المصفوفة A ويرمز لها بالرمز $|A|$

محددة المصفوفة من الدرجة 2×2

محددة المصفوفة $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ تساوي حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي مطروحا منه حاصل ضرب عناصر القطر الثانوي أي ان :

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

ملحوظة : اذا كان $|A|=0$ فإنه يقال ان المصفوفة شاذة .

مثال: اوجد محدد كل المصفوفات التالية وبين فيما اذا كانت شاذة ام لا

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 & 8 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

الحل:

$$|A| = (2)(4) - (5)(8) = 8 - 40 = -32$$

$$|B| = (-2)(4) - (5)(8) = -8 - 40 = -48$$

$$|C| = (1)(4) - (2)(2) = 4 - 4 = 0$$

المصفوفة A, B غير شاذتان ، المصفوفة C شاذة .

محددة المصفوفة من الدرجة 3×3 و سوف نقوم بشرح الطريقة التالية وهي تسمى طريقة ساروس لاي مصفوفة $A =$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$1 - \text{نكتب الصورة العامة لمحددة المصفوفة } A \text{ كما يلي : } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$2 - \text{نضيف العمود الاول و الثاني الى الصورة العامة السابقة} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$3 - \text{نحسب مجموع حاصل ضرب عناصر كل قطر رئيسي : } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$I_1 = (a_{11}a_{22}a_{33}) + (a_{12}a_{23}a_{31}) + (a_{13}a_{21}a_{32})$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

٤- نحسب مجموع حاصل ضرب عناصر كل قطر ثانوي

$$I_2 = (a_{13}a_{22}a_{31}) + (a_{11}a_{23}a_{32}) + (a_{12}a_{21}a_{33})$$

وهي تساوي

$$I_1 - I_2 \text{ قيمة}$$

$$|A| = I_1 - I_2 \text{ و يكون محددة المصفوفة } A$$

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$

مثال: اوجد قيمة محددة

الحل :-

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & -3 & 5 & 2 \end{vmatrix}$$

١- نضيف العمود الاول والثاني الى الصورة العامة السابقة

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & -3 & 5 & 2 \end{vmatrix}$$

٢- نحسب مجموع حاصل ضرب عناصر كل قطر رئيسي

$$I_1 = (3)(1)(-3) + (4)(2)(5) + (-1)(4)(2) = -9 + 40 - 8 = 23$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & -3 & 5 & 2 \end{vmatrix}$$

٣- نحسب مجموع حاصل ضرب عناصر كل قطر ثانوي

$$I_2 = (-1)(1)(5) + (3)(2)(2) + (4)(4)(-3) = -5 + 12 - 48 = -31$$

$$|A| = I_1 - I_2 = 23 - (-31) = 54 \text{ و يكون محددة المصفوفة } 54$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 12 \end{bmatrix}$$

تمرين : اوجد قيمة المحددات التالية

الحل:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 12 & 1 & 5 \end{vmatrix} = (36 + 10 + 15) - (9 + 25 + 24) = 3$$

معكوس المصفوفة : لكي يكون لأي مصفوفة مربعة معكوس يجب ان تكون المصفوفة غير شاذة اي محددها لا يساوي الصفر و نرسم لمعكوس المصفوفة A^{-1} بالرمز

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ نتبع الاتي لإيجاد معكوس المصفوفة}$$

- نوجد محدد المصفوفة A وهو يساوي $|A| = ad - bc$
- نوجد $\text{adj } A$ للمصفوفة A وهي عبارة عن ان نبديل موقع العنصرين a, d ونغير اشارات العنصرين b, c

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj } A \text{ نوجد معكوس المصفوفة من القانون}$$

$$I = A \cdot A^{-1} = I \text{ حيث } I \text{ هي مصفوفة الوحدة و تساوي } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

مثال: اذا كان $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ اوجد A^{-1} , B^{-1}

الحل :

اولا ايجاد A^{-1}

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 15 - 8 = 7$$

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

نوجد معكوس المصفوفة A

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj } A = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{7} & -\frac{2}{7} \\ -\frac{4}{7} & \frac{3}{7} \end{bmatrix}$$

ثانيا: ايجاد B^{-1}

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0$$

اذن هذه المصفوفة شاذة و ليس لها معكوس $B^{-1} = \frac{1}{|B|} \text{adj } B$

e7sas