



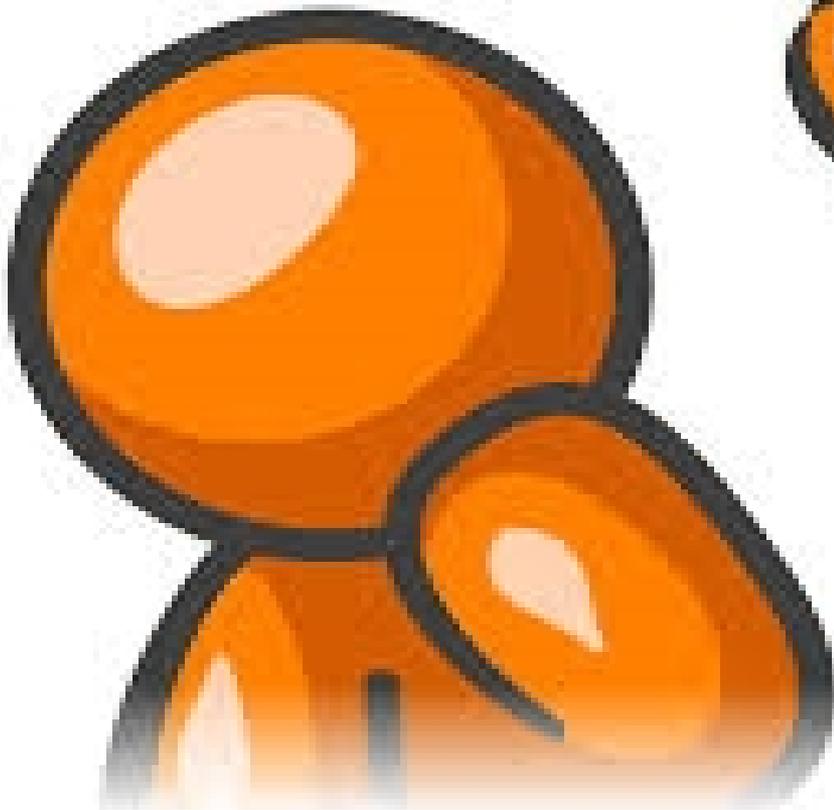
Math_110 - مبادئ الرياضيات

تابع الفصل السابع
المصفوفات والمحددات

$$a \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1xa & 2xa \\ 3xa & 4xa \end{bmatrix}$$

$$a \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1xa & 2 \\ 3xa & 4 \end{vmatrix}$$

د. حسن الفيفي





مثال (من المحاضره السابقه) إذا كان

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

اوجد قيمة كل مما يلي:

- | | |
|------------|----------------|
| 1) $A + C$ | 5) $(A^T)^T$ |
| 2) $A - C$ | 6) $(A - C)^T$ |
| 3) $2B$ | 7) $(AB)^T$ |
| 4) AB | 8) AC |



$$1) A + C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$2) A - C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

$$3) 2B = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 10 & 6 & 2 \\ 12 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$



$$4) AB = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 6 \\ 56 & 36 & 16 \end{pmatrix}$$

$$5) (A - C)^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 6 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 6 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$6) \begin{pmatrix} (AB)^T \\ (AB) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 6 \\ 56 & 36 & 16 \\ 56 & 36 & 16 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 7 & 56 \\ 2 & 36 \\ 6 & 16 \end{pmatrix}$$



7) AC

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \& A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

عدد أعمدة المصفوفة A لا يساوي عدد صفوف المصفوفة C

ولذا لا يمكن إيجاد AC

LECTURE

7

مقدمة في المحددات

الأهداف الرئيسية - Key Objectives

8

- ايجاد محدد المصفوفة من الدرجة الثانية والثالثة.





المحددات : محدد المصفوفة

لكل مصفوفة مربعة A والتي عدد عناصرها أعداد حقيقية ما يسمى بمحددة المصفوفة A ويرمز لها بالرمز $|A|$

محددة المصفوفة من الدرجة 2×2

محددة المصفوفة $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ تساوي حاصل ضرب عناصر القطر

الرئيسي مطروحا منه حاصل ضرب عناصر القطر الثانوي أي أن:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$



ملحوظة: إذا كان $|A|=0$ فإنه يقال أن المصفوفة شاذة

مثال: اوجد محددة كل المصفوفات التالية وبين فيما إذا كانت شاذة أم لا

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

الحل

$$|A| = (2)(4) - (5)(8) = 8 - 40 = -32$$

$$|B| = (-2)(4) - (5)(8) = -8 - 40 = -48$$

$$|C| = (1)(4) - (2)(2) = 4 - 4 = 0$$

المصفوفة A, B غير شاذتان ، المصفوفة C شاذة.



محددة المصفوفة من الدرجة 3×3

هناك طريقتان لإيجاد محدد المصفوفة المربعة من درجة 3×3 وسوف نقوم بشرح الطريقة التالية وهي تسمى طريقة **ساروس** لأي مصفوفة:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

1- نكتب الصورة العامة لمحددة المصفوفة A كما يلي:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$





2- نضيف العمود الأول والثاني إلى الصورة العامة السابقة

$$\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

3- نحسب مجموع حاصل ضرب عناصر كل قطر رئيسي

$$\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

وبالتالي قيمة المحدد

$$I_1 = (a_{11} a_{22} a_{33}) + (a_{12} a_{23} a_{31}) + (a_{13} a_{21} a_{32})$$

4- نحسب مجموع حاصل ضرب عناصر كل قطر ثانوي

$$\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

وهي تساوي $I_2 = (a_{13}a_{22}a_{31}) + (a_{11}a_{23}a_{32}) + (a_{12}a_{21}a_{33})$

5- نحسب قيمة $I_1 - I_2$

6- ويكون محدد المصفوفة A

$$|A| = I_1 - I_2$$



$$A = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$

مثال: اوجد قيمة محددة

الحل 1- نضيف العمود الأول والثاني إلى الصورة العامة السابقة

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & -3 & 5 & 2 \end{vmatrix}$$

3- نحسب مجموع حاصل ضرب عناصر كل قطر رئيسي

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & -3 & 5 & 2 \end{vmatrix}$$



$$I_1 = (3)(1)(-3) + (4)(2)(5) + (-1)(4)(2) \\ = -9 + 40 - 8 = 23$$

3- نحسب مجموع حاصل ضرب عناصر كل قطر ثانوي



$$\begin{array}{ccc|cc} 3 & 4 & -1 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & -3 & 5 & 2 \end{array}$$

4- نحسب قيمة

$$I_2 = (-1)(1)(5) + (3)(2)(2) + (4)(4)(-3) \\ = -5 + 12 - 48 = -31$$

5- ويكون محددة المصفوفة

$$|A| = I_1 - I_2 = 23 - (-31) = 54$$



تمرين: اوجد قيمة المحددات التالية

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 12 \end{pmatrix}$$

الحل:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 12 & 1 & 5 \end{vmatrix} = (36 + 10 + 15) - (9 + 25 + 24) = 3$$



معكوس المصفوفة

لكي يكون لأي مصفوفة مربعة معكوس يجب أن تكون المصفوفة

غير شاذة أي محددها لا يساوي الصفر ونرمز لمعكوس المصفوفة A بالرمز A^{-1}

لإيجاد معكوس المصفوفة $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ نتبع الآتي

• نوجد محدد المصفوفة A وهو يساوي $|A| = ad - bc$

• نوجد $adj A$ للمصفوفة A وهي عبارة عن أن نبدل موقع العنصرين a, d ، ونغير إشارات العنصرين b, c

$$adjA = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad \text{أي أن}$$

• نوجد معكوس المصفوفة من القانون

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adjA$$

ويكون $A.A^{-1} = I$ حيث I هي مصفوفة الوحدة وتساوي

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



إذا كان $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ اوجد A^{-1} , B^{-1}

A^{-1} الحل أولاً إيجاد



$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 15 - 8 = 7$$

$$\text{adj}A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$



- نوجد معكوس المصفوفة A

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}A = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{7} & \frac{-2}{7} \\ \frac{-4}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 - 4 \cdot 3 = 12 - 12 = 0$$

B^{-1}

ثانيا إيجاد

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|} \text{adj}B$$

أذن هذه المصفوفة شاذة وليس لها معكوس



THANK YOU!



جامعة الإمام عبد الرحمن بن فيصل

IMAM ABDULRAHMAN BIN FAISAL UNIVERSITY