المحاضرة الخامسة عشر

تابع الفصل السابع / االمصفوفات.

ثالثاً :- ضرب المصفوفتين.

اذا كانت المصفوفة A من الرتبة m x p

و كانت المصفوفة B من الرتبة p x n فإن حاصل ضرب المصفوفتين AB ، وليكن C

هو مصفوفة من الدرجة m x n حيث تحدد عناصرها بأن يكون العنصر في الصف i

و العمود j في C ناتج من عمليه ضرب الصف i من A مع العمود j من B

$$A_{m\times p} \times B_{p\times n} = C_{m\times n}$$

حتى تكون عملية الضرب على المصفوفات مُعّرفة ، يجب أن يكون عدد اعمدة المصفوفة الأولى مساوياً لعدد صفوف المصفوفة الثانية ، ورتبة المصفوفة الناتجة من حاصل ضرب

هي عبارة عن عدد الصفوف الأولى مضروباً في عدد أعمدة الثانية

بشكل عام ، عند ضرب مصفوفة في أخرى فإننا نقوم بضرب جميع صفوف المصفوفة الأولى

في أعمدة المصفوفة الثانية و **المثال التالي يوضح ذلك :**

$$A = \begin{bmatrix} ٢ & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}_{٢\times 2} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

1) AB 2) BA

الحل :-

1) $AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 2X0 + 3X4 & 2X2 + 3X5 \\ -1X0 + -1X4 & -1X2 + -1X5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 12 & 19 \\ -4 & -7 \end{bmatrix}_{2X2}.$$

2) $BA = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 0\,x\,2 + 2\,x - 1 & 0\,X\,3 + 2\,x - 1 \\ 4\,x\,2 + 5\,x - 1 & 4\,x\,3 + 5\,x - 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}_{2X2}$$

نستنتج أن عملية الضرب المصفوفات عملية غير إبداليه ، بمعنى :

$AB \neq BA$

مثال :- إذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -1 & 7 \end{bmatrix}_{2X3} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}_{3X2}$$

أوجد : 1) AB 2) BA

نلاحظ أن عدد أعمدة المصفوفة A = عدد صفوف المصفوفة B و بالتالي يمكن إيجاد حاصل الضرب في هذه الحاله.

$$BA = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2\,x\,0 + 2\,x - 1 + -4\,x - 2 & 2\,x\,2 + 2\,x\,3 + -4\,x4 \\ 0\,x\,0 + -1\,x - 1 + 7\,x - 2 & 0\,x\,2 + -1\,x3 + 7\,x\,4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & -6 \\ -13 & 25 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}_{3\times2} \begin{bmatrix} 2 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 7 \end{bmatrix}_{2\times3}$$

$$= \begin{bmatrix} 0+0 & 0+-2 & 0+14 \\ -2+0 & -2+-3 & 4+21 \\ -4+0 & -4+-4 & 8+28 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -2 & 14 \\ -2 & -5 & 25 \\ -4 & -8 & 36 \end{bmatrix}_{3\times3}$$

تعريف :- مبدل المصفوفة (Tronspose)

إذا كانت المصفوفة A هي من الرتبة m x n فإن مبدل المصفوفة هي عبارة عن عملية تبديل الصفوف مع الأعمدة

وسنرمز لها بالرمز A^T

بصورة رمزية ، إذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} a11 & a12 \\ a21 & a22 \end{bmatrix}$$

فإن $$A^T = \begin{bmatrix} a11 & a21 \\ a12 & a22 \end{bmatrix}$$

مثال :- إذا كـانت

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \\ -5 & -1 \end{bmatrix}_{3\times2}$$

فإن $$A^T = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 4 & 1 & -1 \end{bmatrix}_{2\times3}$$

تعريف المصفوفة المتماثلة :-

إذا كانت A مصفوفة مربعة من الرتبة m x n فنقول بأن A مصفوفة متماثلة إذا كان :

$$A = A^T$$

مثال :- إذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}_{3\times3}$$

فإن $$A^T = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

حيث نلاحظ أن $A \neq A^T$

وبالتالي المصفوفة A غير متماثلة.

بينما إذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

فإن $$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

فنلاحظ بإن $A \neq A^T$

فنقول بإن المصفوفة A مصفوفة متماثلة.

- **بعض الملاحظات على المصفوفات الرابعة :-**

اذا كانت A مصفوفة مربعة فإن :

١) $A^2 = A \times A$

٢) $A^3 = A \times A \times A$

ونستطيع الأستمرار على هذا الشكل إلى أي عدد من المرات.

مثال :- إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

أوجد A^3 ؟

الحل :- $A^3 = A \times A \times A$

$= A^2 \times A \qquad A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 6 + -3 & 6 + 0 \\ -2 + 0 & -3 + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}_{2\times2} = A^2$$

$$A^3 = A^2 \bullet A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 + -6 & 9 + 0 \\ -4 + 3 & -6 + 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 9 \\ -1 & -6 \end{bmatrix}$$

نهاية الفصل السابع

من المصفوفات

@e7sas_ud

نورا عبدالله