

الفصل الثاني .

العمليات الجبرية : اللوغاريتمات .

ثانيا : اللوغاريتمات .

نشأت فكرة اللوغاريتمات عند المحاولة لإيجاد حل للمعادلة $x = y^N$ بالنسبة للمجهول n فإذا كان كل من x, y عدد موجبين بحيث $y \neq 1$ ، فإنه يوجد عدد حقيقي n بحيث $x = y^N$ ويسمى العدد n بلوغاريتم العدد x للأساس y ويكتب على الصورة :

وباختصار ، يمكن كتابة العلاقة بين المعادلتين السابقتين على الشكل التالي :

$$\log_y(x) = n \quad x = y^n \quad (\text{على الصورة الأسية})$$

$$\text{بشرط} \quad y \neq 1 \quad x, y > 0$$

امثلة : ١- اكتب المقادير التالية على الصورة الأسية :

$$\log_{10}(1000) = 3 \quad 1000 = 10^3 \quad \bullet$$

$$\log_3(9) = 2 \quad 9 = 3^2 \quad \bullet$$

$$\log_{25}(5) = \frac{1}{2} \quad 5 = 25^{\frac{1}{2}} \quad 5 = \sqrt{25} = 5 \quad \bullet$$

٢_ اكتب كلا من المقادير التالية على الصورة اللوغاريتمية :

$$(81)^{\frac{1}{2}} = 9 \quad \log_{81}(9) = \frac{1}{2} \quad \bullet$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{6} \quad \log_{81}(9) = \frac{1}{2} \quad \bullet$$

$$(5)^3 = 125 \quad \log_5(125) = 3 \quad \bullet$$

٣_ إذا كان لدينا المقدار

$$\log_{10}(1000) = n \quad \text{اوجد قيمة } n ?$$

بتحويل المعادلة للصورة الاسية نحصل على : $1000 = 10^n$

$$10^3 = 10^n \quad n = 3$$

بشكل عام ، يوجد اساسات لهما الاهمية الكبرى في هذه التطبيقات المختلفة :

- الاساس للعدد 10 ويسمى اللوغاريتم العشري وعادة في هذا اللوغاريتم لا يكتب الاساس 10 اسفله ..

$$\log(10) = \log_{10}(10)$$

- الاساس للعدد e (e : عدد ثابت مقداره 2.718) ويسمى هذا النوع من اللوغاريتم الذي اساسه e باللوغاريتم الطبيعي ويرمز له بالرمز (ln) ..

خواص اللوغاريتمات :

$$\log_y(1) = 0 \quad \bullet$$

$$\text{مثال : } \log_5(1) = 0, \log_e(1) = \ln(1) = 0$$

$$\log_x(x) = 1 \quad \bullet$$

$$\text{مثال : } \log_{10}(10) = 1$$

$$\log_{25}(25) = 1$$

$$\log_y(x)^n = n \log_y(x) \quad \bullet$$

مثال : ان قيمة المقدار التالي مكتوبة بأبسط صورة هي :

مثال : بسط المقدار التالي :

$$\log_z(xy) = \log_z(x) + \log_z(y) \quad \text{ـ٤}$$

مثال : بسط المقدار التالي :

$$\log_z\left(\frac{x}{y}\right) = \log_z(x) - \log_z(y) \quad \text{ـ٥}$$

مثال : بسط ما يلي :

$$\log\left(\frac{100}{200}\right)$$

الحل بطريقة اخرى :

$$\log_y\left(\frac{1}{x}\right) = \log_y(x)^{-1} = -\log_y(x) \quad \text{ـ٦}$$

$$\log\left(\frac{1}{1000}\right) = \log(1000)^{-1} \quad \text{مثال:}$$

ايضا :

$$\text{Log}_5 \left(\frac{1}{5} \right) = \log_5(5)^{-1} = -\log_5(5)$$

$$\log_y(\sqrt[n]{x}) = \log_y(x)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \log_y(x) \quad \text{ـ}^{\vee}$$

مثال : اوجد قيمة ما يلي :

$$\log_3(\sqrt[3]{27}) = \log_3(27)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \log_3(27) \quad \bullet$$

$$\log_3 \sqrt{27} = \log_3(27)^{\frac{1}{2}} \quad \bullet$$

كثيرات الحدود :

تعريف : ان كثيرة الحدود في متغير واحد x تكتب على الصورة التالية :

حيث $n \geq 0$ وعدد صحيح

ومن الامثلة عليها :

$$\text{كثيرة حدود من الدرجة الخامسة} \quad x^5 - 2x^4 + 3x^2 + x - 1 \quad \bullet$$

$$\text{كثيرة حدود من الدرجة الثالثة} \quad x^3 - x^{\frac{1}{2}} \quad \bullet$$

$$\text{فهذه ليست بكثيرة حدود وذلك لوجود الاس } \frac{1}{2} \text{ في الحد الثاني .. (عدد كسري)} \quad x^3 - x^{\frac{1}{2}} \quad \bullet$$

العمليات الجبرية على المقادير الجبرية :

تعريف : المقدار الجبري هو عبارة عن تركيبة من الرموز والاعداد المرتبطة فيما بينها عن طريق العمليات الجبرية الاساسية (الجمع _ الطرح _ الضرب _ القسمة)

مثال :

$$(X^2 + 1) \text{ (مقدار جبري مكون من حدين)}$$

$$5X^3 - 2X^2 + 10 \text{ (مقدار جبري مكون من ثلاث حدود)}$$

العمليات على المقادير الجبرية :

١- في حالة الجمع او الطرح :

فإننا نجمع او نطرح المعادلات العددية للمتغيرات المتشابهة بعد ترتيبها باستخدام الطريقة الافقية او الطريقة العمودية .

مثال :

$$(3X^2 - 2X - 5) + (10 - 2X^2 + 5X)$$

الحل : نعيد ترتيب المقدار الثاني ونجمع المعاملات المتشابهة :

$$3x^2 - 2x - 5$$

$$-2x^2 + 5x + 10$$

$$\dots\dots\dots$$

$$X^2 + 3x + 5$$

مثال : اوجد ناتج الطرح بين المقدارين :

$$(3x^2 - 2x - 5) - (10 - 2x^2 + 5x)$$

الحل :

$$3x^2 - 2x - 5$$

$$-2x^2 + 5x + 10$$

$$\dots\dots\dots$$

$$5x^2 - 7x - 15$$

٢- ضرب المقادير الجبرية :

لإيجاد حاصل ضرب مقدار جبري اخر فإننا نستخدم عملية التوزيع وقوانين الاسس مع قاعدة الاشارات ثم نجمع الحدود المتشابهة ان وجدت :

مثال : اوجد ناتج ما يلي :

$$5x^2 (-2x^3 - 10x) = -10x^5 - 50x^3$$

$$(x - 1)(x^2 + 2x) = x^3 + 2x^2 - x^2 - 2x$$

$$= x^3 + x^2 - 2x$$

٣_ قسمة المقادير الجبرية :

و لإيجاد حاصل القسمة سنستخدم قوانين الأسس و قوانين الكسور و قاعدة الاشارات ..

وسنتعرف على نوعين من قسمة المقادير الجبرية وهما :

أ – قسمة مقدار جبري مكون من حد واحد على مقدار جبري مكون من حد واحد :

بمعنى :

$$x \neq 0, \quad \frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$$

مثال : اوجد ناتج ما يلي :

$$\frac{27x^3}{9x^2} = 3x \quad \bullet$$

$$\frac{24x^3y^2}{6xy^{-2}} = 4x^2y^2y^2 = 4x^2y^4 \quad \bullet$$

ب _ قسمة مقدار جبري مكون من اكثر من حد على مقادير جبري اخر مكون حد واحد : و في هذه الحالة نستخدم الخاصية التالية :

مثال : اوجد ناتج ما يلي :

25x³

ملاحظة : دائما في عملية القسمة مقدار جبري مكون من اكثر من حد على مقدار جبري اخر مكون من حد واحد فإنه يفضل ترتيب حدود البسط ثم توزيع المقام على كل منها وتطبيق قاعدة قسمة جبري بحد واحد على اخر بحد واحد ..

قد انتهينا من الفصل الثاني ..

تمارين ومسائل :

اوجد ناتج كل مما يلي :

$$(x^2y - xy + 5x) - (xy - 3x^2y - 10x) \quad \dots \quad \log_3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \quad \dots \quad \log_5(\sqrt{25})$$

$$\frac{-24x^5y^2 - 8x^3y^3}{-4x^3y^2} \quad \dots \quad (6xy)(2x^2y - 3xy^2)$$