المحاضرة الأولى

مفاهيم أساسية في الجبر

مجموعات الاعداد

Page 1

يُرمز للمجموعات عادة بالأحرف الكبيرة مثل: X, Y, A, B

والأشياء التي تتألف منها المجموعة تُسمى عناصر ويُرمز للعناصر بالأحرف الصغيرة

مثل: x, y, a, b

إذا كان العنصر x هو أحد عناصر المجموعة A يقال: x ينتمي إلى A

ونكتب: $x \in A$

أما إذا كان العنصر y لا ينتمي للمجموعة A فإننا نكتب: $x \notin A$

المجموعة الخالية هي المجموعة التي لا يوجد بها أي عنصر ويُرمز لها بالرمز $\emptyset$ أو $\{ \ \}$.

مجموعات الاعداد

Page 2

يُعبّر عن المجموعة بإحدى الطريقتين التاليتين:

طريقة السرد (الحصر)

مثال:

1. مجموعة الحروف المكونة لكلمة car هي: $X = \{c, a, r\}$

طريقة الوصف

مثال:

١. مجموعة الحروف المكونة لكلمة car هي: حرف من حروف كلمة car

$X = \{x : x$ حرف من حروف كلمة car$\}$

مجموعات الاعداد

Page 3

(المجموعة المنتهية وغير منتهية)

مثال:

1 $X = \{1,2,3,4\}$ مجموعة منتهية.

2 $Y = \{1,3,5,7, \dots\}$ مجموعة غير منتهية

(المجموعة الجزئية)

مثال:

إذا كانت: $X = \{a, b, c\}, \quad Y = \{a, b, c, d\}, \quad Z = \{a, c, f\}$

فإن: $X \subset Y, Z \not\subset Y$

ملاحظة (1): المجموعة الخالية هي مجموعة جزئية من أي مجموعة.

مجموعات الاعداد

Page 4

(رتبة المجموعة)

رتبة المجموعة X يُرمز لها بالرمز $|X|$، وتعني عدد عناصر المجموعة.

مثال:

إذا كانت $X = \{a, b, c, d, e\}$ فإن: $|X| = 5$

ملاحظة (2):

رتبة المجموعة الخالية تساوي صفر لخلوها من العناصر وبالتالي عدد عناصرها يساوي الصفر

مجموعات الاعداد

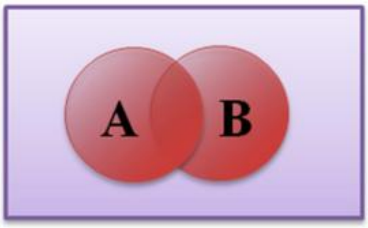
العمليات على المجموعات

Page 5

١. عملية اتحاد مجموعتين (Union)

إتحاد مجموعتين A وَ B هي أخذ جميع عناصر المجموعتين

ويُرمز لها بالرمز $A \cup B$ وتُعرّف بـ $A \cup B = \{x : x \in A$ **or** $x \in B\}$



مثال (8):

إذا كانت $A = \{2,3,4,5\}$ و $B = \{3,5,7\}$

فإن $A \cup B = \{2,3,4,5\} \cup \{3,5,7\} = \{2,3,4,5,7\}$

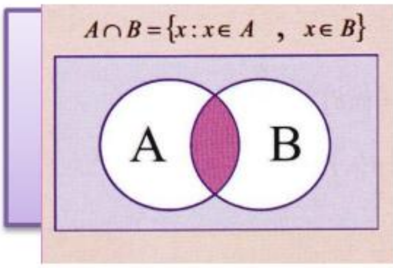
الباب الأول : مجموعات الاعداد

Page 6

١. عملية تقاطع مجموعتين (Intersection)

تقاطع مجموعتين A وَ B هي إيجاد العناصر المشتركة بينهما،

ويُرمز لها بالرمز $A \cap B$ وتُعرّف بـ $A \cap B = \{x : x \in A \ , \ x \in B\}$



مثال (13):

إذا كانت $A = \{a,b,c,d\},\ B = \{b,d,e,f\},\ C = \{e,f,g,h\}$.

$$A \cap C = \{a,b,c,d\} \cap \{e,f,g,h\} = \phi$$

$$A \cap B = \{a,b,c,d\} \cap \{b,d,e,f\} = \{b,d\}$$

$$B \cap C = \{b,d,e,f\} \cap \{e,f,g,h\} = \{e,f\}$$

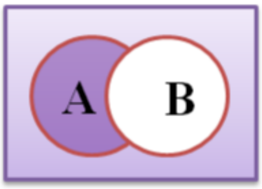
الباب الأول : مجموعات الاعداد

Page 7

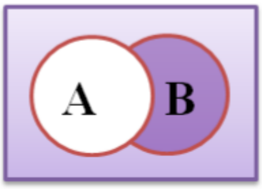
٣.عملية طرح مجموعة من أخرى (Difference)

(الفرق بين مجموعتين A وَ B)

١) $A-B=\{x: x\in A,\ x\notin B\}$



٢) $B-A=\{x: x\in B,\ x\notin A\}$



(ملاحظة4 :($A-B \neq B-A$

الباب الأول : مجموعات الاعداد

Page 8

مثال :

إذا كانت

$$A=\{1,2,3,4,5,6\},\ \ B=\{1,3,5,7\}$$

فإن:

$$A-B=\{1,2,3,4,5,6\}-\{1,3,5,7\}=\{2,4,6\}$$

$$B-A=\{1,3,5,7\}-\{1,2,3,4,5,6\}=\{7\}$$

الباب الأول : مجموعات الاعداد

Page 9

عملية الإتمام (Complement)

قبل التحدث عن عملية الإتمام لابد من تعريف المجموعة الشاملة(*Universal*)

(المجموعة الشاملة) : تحتوي على جميع العناصر، ويُرمز لها بالرمز U.

مثال (16): إذا كانت

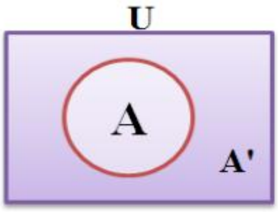
A مجموعة الأعداد الطبيعية الزوجية.

B مجموعة الأعداد الطبيعية الفردية.

فإن المجموعة الشاملة U هي مجموعة الأعداد الطبيعية.

(عملية الإتمام): A' هي المجموعة المتممة للمجموعة A:

$$A' = U - A = \{x : x \in U, x \notin A\}$$



الباب الأول : مجموعات الاعداد

Page 10

مثال (17):

بالعودة لمثال (16) فإن

مجموعة الأعداد الطبيعية الفردية $U - A = A' = B$

وأيضاً مجموعة الأعداد الطبيعية الزوجية $U - B = B' = A$

ملاحظة (5):

١) $A \cup A' = U$

٢) $A \cap A' = \phi$

٣) $A \cup U = U$

٤) $A \cap U = A$

مثال (18):

إذا كانت $U = \{1,2,3,...,10\},\ A = \{3,4,5,6\}$. فإن A'.

$$A' = U - A = \{1,2,7,8,9,10\}$$

الباب الأول : مجموعات الاعداد

Page 11

المجموعات العددية

1. مجموعة الأعداد الطبيعية: $N = \{1,2,3,4,...\}$
2. مجموعة الأعداد الكلية: $W = \{0,1,2,3,4,...\}$ ، أي أن $W = N \cup \{0\}$
3. مجموعة الأعداد الصحيحة: $Z = \{...,-3,-2,-1,0,1,2,3,...\} = \{0,\pm1,\pm2,\pm3,...\}$
4. مجموعة الأعداد القياسية (النسبية أو الكسرية):

يمكن كتابتها على صورة كسر: $Q = \left\{x : x = \frac{a}{b},\ a,b \in Z,\ b \neq 0\right\}$.

التمثيل العشري للأعداد القياسية إما أن يكون منتهي أو أن يكون غير منتهي ومتكرراً.

5. مجموعة الأعداد غير القياسية (غير النسبية – غير الكسرية) $\bar{Q}$:

لا يمكن كتابتها على صورة كسر مثل: $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \frac{1}{\sqrt{7}}, e, \pi$

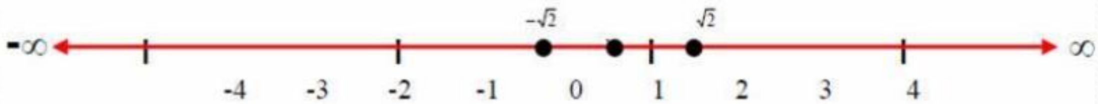
التمثيل العشري للأعداد غير القياسية غير منتهي وغير متكرر.

6. مجموعة الأعداد الحقيقية R: وهي مجموعة جميع الأعداد الكسرية وغير الكسرية.

الباب الأول : مجموعات الاعداد

Page 12

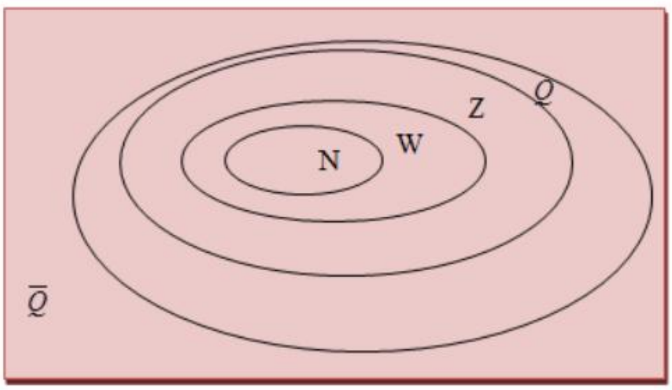
خط الأعداد الحقيقة



ملاحظة (8):

١) $N \subset W \subset Z \subset Q \subset R$.
٢) $Q \cup \bar{Q} = R$.
٣) $Q \cap \bar{Q} = \phi$.

R



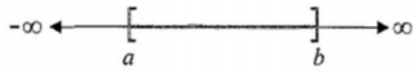
الباب الأول : مجموعات الاعداد

Page 13

الفترات العددية

1) الفترات المحدودة:

1. الفترة المغلقة هي:



$[a,b]=\{x : a \le x \le b\}$

2. الفترة المفتوحة هي:

$(a,b)=\{x : a < x < b\}$

الفترة نصف مغلقة أو نصف مفتوحة

$(a,b]=\{x : a < x \le b\}$

$[a,b)=\{x : a \le x < b\}$

الباب الأول : مجموعات الاعداد

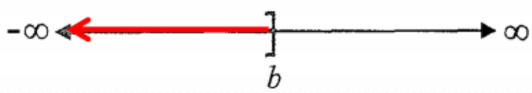
Page 14

الفترات العددية

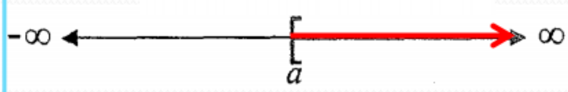
الفترات العددية غير المحدودة

الفترة نصف مغلقة أو نصف مفتوحة:

$(-\infty,b]=\{x : x \le b\}$

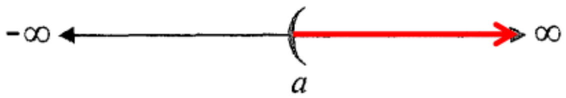


$[a,\infty)=\{x : x \ge a\}$

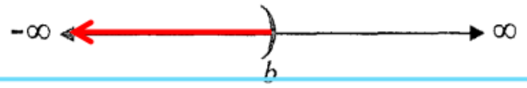


الفترة المفتوحة

$(a,\infty)=\{x : x > a\}$



$(-\infty,b)=\{x : x < b\}$



فترة جميع الأعداد الحقيقة $R=(-\infty,\infty)$ وهي فترة مفتوحة.

الباب الأول : مجموعات الاعداد

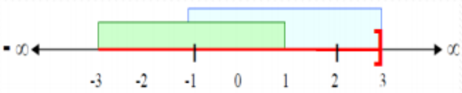
Page 15

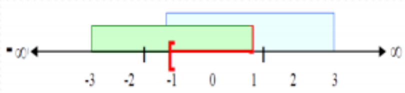
مثال: عبر عن التالي على: خط الاعداد و صورة فترة و صور مجموعة

$(-1,3)\cup[-3,1]$

$(-1,3)\cap[-3,1]$

١) على خط الأعداد الحقيقية:





٢) على صورة فترة:

$(-1,3)\cup[-3,1]=[-3,3)$

$(-1,3)\cap[-3,1]=(-1,1]$

٣) على صورة مجموعة:

$\{x: -3\le x<3\}$

$\{x: -1< x\le 1\}$

الباب الأول : مجموعات الاعداد

Page 16

القيمة المطلقة

$$y=|x|=\begin{cases} x, & x\ge 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$$

مثال (24):

$|4|=4,\qquad |-6|=6$

المسافة بين عددين على خط الأعداد:

$d(x,y)=|x-y|$

ملاحظة (9):

المسافة بين x وَ y هي نفس المسافة بين y وَ x أي أن:

$d(x,y)=d(y,x)$ أو $|x-y|=|y-x|$

مثال(25): أوجد المسافة بين -1 ، 2.

$d(-1,2)=|-1-2|=|-3|=3$

خصائص القيمة المطلقة

ليكن x وَ y عددين حقيقيين فإن :

1) $|x|\ge 0$

2) $|-x|=|x|$

3) $|xy|=|x|\,|y|$

4) $\left|\dfrac{x}{y}\right|=\dfrac{|x|}{|y|}$ ، $y\ne 0$

5) $|x+y|\le |x|+|y|$